

§4 解析函数的幂级数展开

- 内容: (1) 复级数(数项级数, 函数项级数)的敛散性定义
(2) 幂级数的收敛域及和函数的性质(收敛半径的求法)
(3) 解析函数展成幂级数

§4.1 复级数敛散性

一、复数项级数

1. Def. 一系列复数 $\{\alpha_n\}$, 称 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 为一个复数项级数, 简称复级数, 其中 α_n 称为通项.

$S_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ 称为前 n 项和.

若 S_n 收敛于 S , 则 $\sum \alpha_n$ 收敛, 其和为 S , 记作 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = S$.

例如 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

2. 条件收敛、绝对收敛

Def. 若 $\sum \alpha_n$ 收敛但 $\sum |\alpha_n|$ 发散, 则 $\sum \alpha_n$ 条件收敛.

若 $\sum \alpha_n$ 收敛且 $\sum |\alpha_n|$ 也收敛, 则 $\sum \alpha_n$ 绝对收敛.

一般地, 级数 $\left\{ \begin{array}{l} \text{发散} \\ \text{收敛} \left\{ \begin{array}{l} \text{条件} \\ \text{绝对} \end{array} \right. \end{array} \right.$

3. 有关结论

(1) 若 $\alpha_n = a_n + i b_n$, 则 $\sum \alpha_n = S \Leftrightarrow \sum a_n = \operatorname{Re} S, \sum b_n = \operatorname{Im} S$

(2) 若 $\sum |\alpha_n|$ 收敛, 则 $\sum \alpha_n$ 收敛

(3) 柯西收敛准则: $\sum \alpha_n = S \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N$, 当 $n > N$ 时 $\forall p \in \mathbb{N}^+$ 都有 $|\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p}| < \varepsilon$.

二、函数项级数

1. Def. 定义在点集 E 上的函数 $\{f_n(z)\}$, 称 $f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 为一个复函数项级数, 其中 $\sum_{i=1}^n f_i(z) = S_n(z)$ 称为前 n 项和.

若对 $z \in E$, $\sum f_n(z)$ 收敛, 则称 z 为一个收敛点,

若对 $z \in E$, $\sum f_n(z)$ 发散, 则称 z 为一个发散点,

收敛域: 级数的收敛点的全体所成集合称为收敛域, 常用 D 记, $D \subset E$.

和函数: 在收敛域上, $\sum f_n(z)$ 的和 $f(z)$ 称为和函数.

2. 分析定义: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, z), n > N$ 时
 $|S_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, 其中 $S_n(z) = \sum_{i=1}^n f_i(z)$

柯西收敛准则: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, z)$, 则当 $n > N$ 时 $\forall p \in \mathbb{N}^+$ 都有
 $|f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$.

3. (1) $\sum f_n(z)$ 在 D 上一致收敛于 $f(z)$: $\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), n > N$ 时 $\forall z \in D$ 有 $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

(2) 柯西收敛准则: $\sum f_n(z)$ 一致收敛到 $f(z) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), \forall z \in D, \forall p \in \mathbb{N}^+$ 都有 $|f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| < \varepsilon$.

(3) 控制收敛定理: 若 $f_n(z)$ 在 D 上满足 $|f_n(z)| \leq M_n$, 且 $\sum M_n$ 收敛, 则 $\sum f_n(z)$ 在 D 上绝对且一致收敛 (柯西收敛准则可证)

三、一致收敛的性质

1. 若 $f_n(z)$ 都在点集 D 上连续, 且 $\sum f_n(z)$ 在 D 上一致收敛到 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 D 上连续

Pf. 取 $z_0 \in D$. 由于 $\sum f_n(z)$ 一致收敛到 $f(z)$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N$ 时 $\forall z \in D$, 都有 $|S_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$, 取 $N+1$ 时也有 $|S_{N+1}(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}$.
又 $S_{N+1}(z) = f_1(z) + \dots + f_{N+1}(z)$ 在 z_0 连续, 对 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ 当 $|z - z_0| < \delta$ 时 $|S_{N+1}(z) - S_{N+1}(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$\begin{aligned} \text{则当 } |z - z_0| < \delta \text{ 时, } |f(z) - f(z_0)| &= |S_{N+1}(z) - f(z) - S_{N+1}(z_0) + f(z_0)| \\ &= |S_{N+1}(z) - f(z) + S_{N+1}(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq |S_{N+1}(z) - f(z)| + |S_{N+1}(z_0) - f(z_0)| \\ &\quad + |S_{N+1}(z) - S_{N+1}(z_0)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. 若 $f_n(z)$ 在复平面一条光滑或分段光滑曲线段 C 上都连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在 C 上一致收敛, 则 $f(z)$ 在 C 上可积, 且可以逐项积分:

$$\int_C f(z) dz = \int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C f_n(z) dz$$

3. 若 $f_n(z)$ 都在区域 D 上解析, 且 $\sum f_n(z)$ 在 D 上一致收敛于 $f(z)$, 则 $f(z)$ 在 D 上解析, 且可以逐项求任意阶导数: $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$

Pf. (1) 先证 $f(z)$ 解析: Morera 定理

任取 D 内围线 C , $\sum f_n(z)$ 在 C 上一致收敛于 $f(z)$.

$$\text{则 } \oint_C f(z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_C f_n(z) dz, \text{ 由柯西积分定理, } \oint_C f_n(z) dz = 0$$

即 $\oint_C f(z) dz = 0$, 于是 $f(z)$ 解析

(2) 求任意阶导数

$\forall z \in D$, 取内部含 z 的围线 C :

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi)$ 在 C 上一致收敛到 $f(\xi)$, 进而 $\forall k \in \mathbb{N}^+$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}} \text{ 在 } C \text{ 上一致收敛到 } \frac{k!}{2\pi i} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}$$

用逐项积分可知, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{n!} \oint_C \frac{f_n(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz = \frac{k!}{n!} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$

$$\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z)$$